

# カオスを用いた流体混合

## Mixing of Fluids Due to Their Chaotic Motion

船越 満明 (京大情報)

Mitsuaki FUNAKOSHI, Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku, Kyoto

### 1 はじめに

流体の混合過程は、化学工業、食品工業、ガラス工業などを始めとする多くの業種の製造過程の中で重要なものである。また、自然界においても、大気汚染物質の拡散や噴火した火山からの火山灰の拡散などの問題において、混合過程が重要となっている。このように重要なテーマである流体混合問題に関しては、古くから数多くの研究が行われてきたが、1980年代からカオスや力学系の理論に基づいて流体粒子(流体の微小部分)のカオス運動や流体の混合問題を調べようという、新しい立場からの混合の研究が行われ始めた。

カオスは、よく知られているように、非線形系の解の示す、初期値に対する敏感な依存性をもつ不規則な振る舞いである。このカオスに関する理論は、1960年代以降に、コンピュータが実用化されて数値計算が容易になったこともあって急速に発展を遂げ、現在では非線形系の示す代表的な振る舞いの1つとして重要なものとなっている。また力学系の理論は、さまざまな初期値に対する常微分方程式系の解の長時間でのふるまいなどの大域的性質を、主に幾何学的手法で包括的に調べる理論であり、工学や物理学などの分野でも、この理論を応用した研究が盛んに行われている。

カオス混合(chaotic mixing)とは、流体粒子の運動がカオスとなるような速度場を作り出すことによって流体を効率よく混合しようとする研究であり、カオスを有効に利用しようとする研究の一つであると言える。以下では、まず流体粒子のカオス運動であるラグランジアンカオスについて、力学系の理論の立場からの位置付けを述べた後、いくつかの例を示す。次いで、このラグランジアンカオスと混合との関係について一般的な説明を行った後、カオス混合の具体的な研究例をいくつか紹介し、力学系の理論の考え方から導かれるいくつかの混合効率の指標とその有用性についても触れる。

### 2 ラグランジアンカオス

いま、 $\mathbf{x}$ を空間座標、 $t$ を時間として、ある流体運動における速度場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ が解析的あるいは数値的に求まっていると仮定すると、その速度場での流体粒子の位置 $\mathbf{X}(t)$ は、

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t), t) \quad (1)$$

の微分方程式に従って時間発展する。この方程式の解 $\mathbf{X}(t)$ がカオスとなるとき、このカオスはラグランジュ的記述法(各流体粒子のもつ位置、速度、圧力などの物理量の時間変化に着目した流体運動の記述法)での従属変数の1つである $\mathbf{X}(t)$ のカオス挙動という意味で、ラグランジアンカオス(Lagrangian chaos)と呼ばれる。

速度場が $t$ に依存しない定常流の場合は(1)の右辺は $t$ に陽に依存せず、力学系の理論においては、このときの(1)は自律系と呼ばれる。一方、速度場が $t$ に依存する非定常流の場合は(1)の右辺は $t$ に陽に依存し、(1)は非自律系と呼ばれる。力学系の理論によると、2変数以上の非自律系あるいは3変数以上の自律系では、カオス解が存在可能である。すなわち、2次元の非定常流の場合や3次元の定常流の場合は、流体粒子の位置 $\mathbf{X}(t)$ はカオスとなり得るが、2次元定常流の場合には $\mathbf{X}(t)$ はカオスとはなり得ない。また、乱流のように速度場が時間的、空間的に不規則に変動している場合、それに従って動く流体粒子も不規則に動くのは当然であるが、このような不規則な時間変動をする速度場の中での $\mathbf{X}(t)$ のふるまいを、力学系の理論を用いて調べることは困難であるので、これまでのラグランジアンカオスに関する研究は、3次元の定常流、あるいは2次元の時間周期流(時間に関して周期的な速度場)に関するものが大部分である。カオスや力学系の理論の立場からは、3次元の定常流や2次元の時間周期流の下で流体粒子の運動がカオスとなり得ることは当然なのであるが、流体力学の分野でこのラグランジアンカオスに関する研究が始まったのは1980年代に入ってからである。

非圧縮性流体の場合には、連続の方程式 $\text{div} \mathbf{u} = 0$ が成り立つので、(1)は保存系と呼ばれる微分方程式となる。保存系においては、従属変数(今の場合 $\mathbf{X}$ )の空間内の任意の領域の体積が、この領域内の各点の(1)に従う時間発展によって変化しないという性質があるが、今の(1)の場合は物理空間が従属変数の空間と同じであるので、非圧縮性からこの体積の不変性は当然である。従って、非圧縮性流体で現れるラグランジアンカオスは保存系のカオスとなる。保存系は一般に可積分系と非可積分系に分けられる。可積分系では、従属変数の空間におけるすべての解軌道は、ずっと同じ値をとり続ける平衡点、周期的に変動する周期軌道などの規則的なものとなり、カオスは現れない。一方、非可積分系ではカオス解が可能であり、従属変数の空間は規則領域とカオス領域に分けられる。規則領域から出発した解軌道は、周期軌道あるいは平衡点となるが、カオス領域から出発したものは、この領域内で不規則な軌道を描く。従って、ラグランジアンカオスが見られる場合には、流体の占める領域は規則領域とカオス領域に分けられ、規則領域から出発した流体粒子は規則的な動きをするが、カオス領域から出発したものは、この領域内を不規則に複雑に動き回る。そして、この2つの領域の境界は細かく見ると複雑な構造をしている。また、3次元定常流の場合は、規則領域とカオス領域の一方から出発した流体粒子は、他方の領域には決して入り込まないという、流体混合を考える上で重要な性質をもつ。

次に、とくに $x, y$ 平面上の2次元流を考え、 $\mathbf{X}$ の $x, y$ 成分

を  $X, Y$  とすると、流れ関数  $\psi(x, y, t)$  を用いて、(1) は

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial}{\partial Y}\psi(X, Y, t), \quad \frac{dY}{dt} = -\frac{\partial}{\partial X}\psi(X, Y, t), \quad (2)$$

と表せる。従って、(2) は流れ関数をハミルトニアンとする 1 自由度ハミルトン系と考えることもできる。定常流では、 $\psi$  が不変量となって(2) は可積分系となる。一方、非定常流では自明な不変量は存在しないので、一般には非可積分系になる可能性がある。従って、2次元時間周期流では流体粒子はカオス的に動くことが可能であるが、その場合でも流体の存在領域は規則領域とカオス領域に分けられ、各々から出発する流体粒子の動きは大きく異なる。また、速度場の 1 周期ごとの流体粒子の位置の時間発展を考えた場合、3次元定常流の場合と同様に、一方の領域から出発した流体粒子は決して他方の領域に入りこまないという性質をもつ。

ラグランジアンカオスに関する研究はこれまで多数あるが、その中で最も多いのは 2次元時間周期流に対するものである。代表的なものとしては、交互に周期的に回転する偏心 2 円筒間の流れ、上下の壁が交互に周期的に動く長方形領域内の流れがある。これらの場合、流体の占める領域がカオス領域と規則領域に分割され、円筒や壁の動かし方を変えると、カオス領域の割合や位置が変わっていくことが知られている。また、セル境界の位置が周期的に変動するような多数の熱対流セルの時間周期流におけるラグランジアンカオスの研究も行われ、境界位置が変動することによって流体粒子がセル間を速く移動することが実験や数値計算でわかっている。

3次元定常流におけるラグランジアンカオスは、定常流の流れ線が複雑な幾何学的構造をもつことを示している、「流線のカオス」とも呼ばれる。この例としては、3次元キャピティーフロー、2方向に曲がった円管内の流れ、球状領域内の遅い流れなどが知られている。また、スタティックミキサーと呼ばれる混合装置（管状のもので、一端から入れた 2 つの流体が管内を通過する際に、内部に置かれた構造物の作り出す流れによって混合されていくようにした装置）の中の 3次元定常流によるラグランジアンカオスについても調べられている。

### 3 ラグランジアンカオスと混合の関係

ある領域内にある、体積  $V_A$  と  $V_B$  の 2 つの非圧縮性流体 A と B を混合しようとする際には、この領域内のどの微小領域においても、これらの流体の体積比が  $V_A : V_B$  になるようにできれば、混合が達成されたと考えることができる。また、何らかの外力によってこれらの流体を動かして混合しようとする場合、最初の 2 流体の境界面（あるいは 2次元流れの場合は境界線）が大きく変形し、大変小さい間隔で折りたたまれた状態になると、混合が進んだと言えることができる。最終的には、分子拡散（相対拡散）の効果によって 2 流体は完全に混合されると期待されるが、カオス混合の研究においては、通常はこの効果は明示的には考えず、どの微小領域での 2 流体の体積比も  $V_A : V_B$  に近い状態になることや、2 流体の境界面が十分小さい間隔で折りたたまれた状態になることを混合の目標と考える。このような状態になると、拡散効果が強く働き、すみやかに完全な混合が達成されると期待できる。

2 流体の境界面がすみやかに折りたたまれていくためには、境界面の面積は急激に増加しなければならない、最初ごく近くにいた境界面上の 2 つの流体粒子の間の距離は、一般に急速に増大する必要がある。この要請は、まさに(1)のカオス解のもつ初期値に対する敏感な依存性そのものである。従って一般に、ラグランジアンカオスとなるときには効率の良い混合が期待される。そこで、 $\mathbf{X}(t)$  がカオスとなるような速度場  $\mathbf{u}$  を用いて効率よく流体を混合することが考えられ、それは一般にカオス混合と呼ばれている（詳しくは、文献 1-6）を参照）。

第 2 節で述べたラグランジアンカオスの振る舞いを混合という観点から考えると、カオス領域では、流体粒子の動きが初期値に対する敏感な依存性をもつことから、効率のよい混合が期待できる。一方、規則領域での流体粒子の運動は初期値に対する敏感な依存性をもたないので、規則領域内での混合の効率は良くないと予想される。さらに、これらの領域間での流体の移動はないので、大きな規則領域が存在する場合は混合の効率は良くないと考えられる。従って、効率の良い混合のためには、できるだけ規則領域の割合が小さくなるような流れが望ましい。

なお、流体を混合したいときに、水などの低粘性流体に対しては乱流による混合が通常用いられるが、高粘性流体の混合や流体の微細構造を壊さないような混合においては、層流による混合が主に用いられる。例えば、化学プラントなどではしばしば非常に粘性係数の大きい 2 つの液体を混合することが必要となる。このような場合でも、もちろん攪拌装置を動かす速さを十分大きくすれば、流れは乱流となる。しかし、そうするためには大変大きなパワーが必要であり、現実問題として難しいことが多い。そこで、比較的ゆっくりした攪拌装置の運動によって作り出される層流速度場  $\mathbf{u}$  の下で、いかにして小さいパワーで効率良く混合を達成するかが重要になる。また、食品の原材料を混合する場合などには、原材料のもつ味覚、食感などを壊さないような混合が求められることもある。さらに、近年ではマイクロスケールでの流体運動に関する研究も盛んに行われているが、このようなレイノルズ数が低い流れによる混合においても層流混合の研究は重要である。カオス混合の研究では、すでに述べたように主に定常流や時間周期流を考えており、基本的に層流を対象にしているため、これらの問題との関係が深い。

### 4 混合度、混合効率と混合過程

以下では、2 流体の与えられた分布（配置）がどの程度混合された状態にあるかを表す指標を「混合度」と呼ぶことにすると、混合度は定性的には流体中に入れた色素の分布を表す図などから判断することができる。一方、定量的指標としては、これまで化学工学等の分野において、場所による濃度変動の大きさ（濃度の非一様性の残り具合）の指標として、分離の強さ  $\sigma$  が用いられてきた。これは

$$\sigma^2 = \frac{1}{N(1 - \bar{\rho}_A)\bar{\rho}_A} \sum_{i=1}^N (\rho_{Ai} - \bar{\rho}_A)^2, \quad (3)$$

によって定義され、 $\rho_{Ai}$  は流体の占める領域を  $N$  個の小さいセルに分割したときに  $i$  番目のセルで流体 A の占める割合であり、 $\bar{\rho}_A = V_A / (V_A + V_B)$  である。 $\sigma^2$  は正規化された濃度分散を表し、セルの大きさ以上のスケールで 2 流体が完全に混合し

ているときは  $\sigma = 0$  となり、完全に分離しているときは  $\sigma = 1$  となる。従って、 $\sigma$  の値はセルの大きさに依存する。

また、各流体の（未混合の）塊の大きさの指標、すなわち濃度変動の代表的な空間スケールを表す1つの指標として斑隙厚み  $\delta$  がある。これは、2流体の境界面（あるいは境界線）の層状構造（あるいは縞模様）の平均間隔として定義されるが、境界面（線）のデータから、この値を計算するアルゴリズムを作るのは容易でない。また、同じような指標として、次式によって定義される分離のスケール  $S$  がある。

$$S = \int_0^l \frac{C(r)}{C(0)} dr. \quad (4)$$

ここで

$$C(r) = \langle (\rho_A(\mathbf{x}) - \bar{\rho}_A)(\rho_A(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \bar{\rho}_A) \rangle, \quad (5)$$

は濃度の相関関数であり、 $\rho_A(\mathbf{x})$  は点  $\mathbf{x}$  における流体 A の濃度、 $r = |\mathbf{r}|$  である。また  $l$  は  $C(r)$  の最小の零点である。

ある流れが与えられたときに、その流れの「混合効率」は、例えば「与えられた混合度を、どれだけ少ないエネルギーで実現できるか」あるいは「与えられたエネルギーを使って、どれだけ大きい混合度を実現できるか」によって測ることが考えられる。以下では、混合効率のきっちりとした定義は行わず、何らかの制約の下での高い混合度の達成の程度を表す一般的な概念として、この言葉を使う。カオス混合の研究においては、カオスや力学系の理論を用いて「どのような情報から流れの混合効率が推測可能か」や「流れが高い混合効率をもつためには、どのような条件が必要か」などを調べるのが重要なテーマとなる。そして、これらに関して得られた結果に基づいて混合装置の設計における基本的考え方や指針を与えることも1つの目標である。

これまでの混合に関する研究において用いられてきた混合過程の基本的な考え方は、「高剪断領域での線要素、面要素の引き伸ばし+低剪断領域における流体の移動」である。この高剪断領域の候補としては、流れが急に狭まる部分や、適当な座標系で淀み点型の速度場となる部分がある。そして一般に、高剪断領域での剪断速度が大きいほど混合効率は高いと予想される。また、低剪断領域における流れによって、高剪断領域にすべての流体が順次来るようにすることができれば混合効率は高く、逆に高剪断領域にこない部分がある場合には、混合効率は低いであろう。また高剪断領域に流体が移動してくる際の線要素、面要素の向きも重要であり、それが適切となるようにできれば混合効率は高くなる。

また、スタティックミキサーなどにおいては、流体の分割と再配置による混合である「分配混合」が混合過程の基本的な考え方である。この場合は、流体が次々と細かく分割されていくような再配置のしかたが好ましい。この分配混合も、分割の行われる部分が「高剪断領域」に対応し、再配置が「低剪断領域における移動」に対応すると思えば、本質的には上の段落で説明した考え方と同様である。

また「高剪断領域での線要素、面要素の引き伸ばし+低剪断領域における流体の移動」という混合の描像はかなり普遍性が高いと思われるが、どんな流れでも常に成り立つという保証はない。また、現実的な混合装置において、このような「役割分

担」のない流れを作るのは困難であると思われる。与えられた流れを上記の描像で見るとき、高剪断であるかどうかはローカルに判断できるので、高剪断領域は比較的容易に求められる。一方、低剪断領域における流体の移動が適切なものかどうかの判定には、ある程度長時間にわたる  $\mathbf{X}(t)$  の情報が必要なので、一般に手間がかかる。

## 5 混合効率の予測と評価

流れの混合効率の予測や評価のために、いろいろな方法がこれまで用いられてきたが、それらの優劣を判断する際に考えるべき観点としては、例えば、定性的評価と定量的評価、短時間での混合と長時間での混合、混合すべき流体の初期配置に対する依存性、必要な計算量、などがある。

以下では、ラグランジアンカオスの見られる具体的な流れの例として、交互に周期的に回転する偏心2円筒間の2次元時間周期流、あるスタティックミキサーのモデルでの3次元定常流などを考え、これらの例を用いていくつかの混合効率の予測と評価の方法を紹介する。

## 6 偏心2円筒間の遅い流れでの混合効率の評価の例

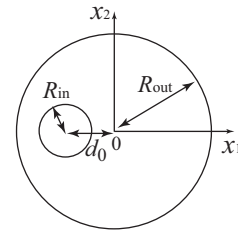


Fig. 1: Periodically rotating eccentric cylinders.

本節では、Fig.1のように、半径  $R_{out}$  と  $R_{in}$  の2円筒が中心が  $d_0$  だけずれるように偏心しており、両円筒が交互にゆっくりと周期的に回転することによって作られる、円筒間の流体の遅い2次元時間周期流を考える。

### 6.1 ポアンカレ断面に基づく評価

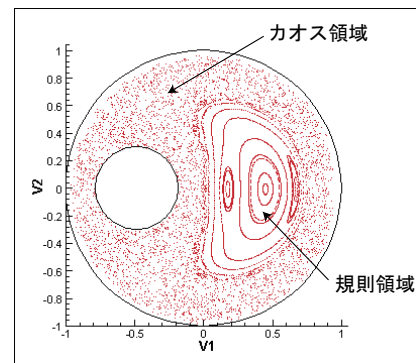


Fig. 2: Poincaré section.

ポアンカレ断面とは、Fig.2 に示したように、いくつかの流体粒子の位置を速度場の1周期ごとにプロットしたものであり、

$$\mathbf{X}(nT), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (T: \text{速度場の周期}), \quad (6)$$

で定義される点の集合である。通常は、比較的少数個の流体粒子について、多周期にわたって点をプロットする。ポアンカレ断面では、Fig.2 からわかるように、多くの点がランダムに分布しているカオス領域と、多数の閉曲線からなる規則領域が容易に判別できるので、各領域の大きさを求めれば混合効率の指標として使える。この際、各領域の大きさを精密に求めるのは難しいが、大体の値は計算可能である。この方法は、比較的少ない計算量で調べたい流れの混合効率の目安が得られるので、多くのカオス混合の研究で用いられているが、問題点としては「多周期での混合効率に関しては有用な情報を与えるが、少ない周期での混合効率の予測には使いにくい」ということがある。偏心2円筒間の流れにおいては、カオス領域の大きさは偏心率に敏感に依存することが知られている。

## 6.2 ポアンカレ写像の周期点とその安定性に基づく評価

力学系の理論でしばしば用いられるポアンカレ写像は、カオス混合の研究においても頻繁に使われる。2次元時間周期流では、

$$M: \mathbf{X}(t) \mapsto \mathbf{X}(t+T), \quad (T: \text{速度場の周期}), \quad (7)$$

によって2次元のポアンカレ写像  $M$  が定義できて、非圧縮性流体では  $M$  は面積保存写像となる。このポアンカレ写像の周期点とその安定性の計算は、ニュートン法などを用いると比較的容易に行える。

保存系の振る舞いとしてよく知られているように、安定周期点のまわりには必ず島領域（規則領域）がある。そして第2節で述べたように、この領域内の流体は他の部分と混じらないので、島領域の存在は混合にとって好ましくない。従って、周期点の数や各周期点の安定性を計算することにより、混合効率をある程度評価することが可能となる。すなわち、安定周期点がない場合にも存在しない場合には、混合効率は高いであろうと予測される。また、偏心率や半径比のような流れを決めるパラメータを変えていったときに、安定周期点不安定化あるいは消滅すると島領域の消滅が期待されるので、周期点の分岐を調べることも意味がある。なお、周期の大きい安定周期点のまわりの島領域は一般に小さいことが経験的に知られている。

ポアンカレ写像の周期点とその安定性に基づく混合効率の評価は、ある程度うまく行える場合もあるが、一般的には以下のような問題点がある。(a) 島領域の数や位置はわかっても、混合効率に大きな影響のある島領域の大きさを見積もることが難しい。(b) 安定周期点不安定化しても、そのまわりの島領域の外側の部分が残ることが稀にある。

## 6.3 ポアンカレ写像の不安定周期点の安定多様体に基づく評価

この方法は、高剪断領域であると期待されるポアンカレ写像の不安定周期点の近くに来る流体粒子が、どのような広がりをもつ領域から動いてくるかを見ることによって、混合効率を評価しようとするものである。具体的には、Fig.3 に示したような不安定周期点の安定多様体の一部の分布を混合効率の指標と



Fig. 3: Stable manifold of an unstable fixed point.

して使う (Fig.3 においては、四角で示した不安定固定点の安定多様体を示している)。すなわち、この集合がカオス領域全体にまんべんなく広がっている場合には、混合効率が高いと予想される。一方、この集合がカオス領域全体に広がっていない場合には、たとえカオス領域が大きくても少ない周期での混合効率は高くないと思われる。

## 7 スタティックミキサーでの混合効率の評価の例

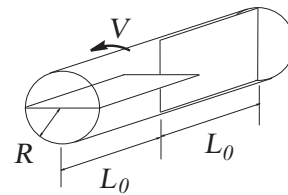


Fig. 4: PPM model (one axial period).

水野と船越<sup>7)</sup>は、Fig.4 に示した、スタティックミキサーの比較的簡単なモデルである Partitioned-pipe mixer (PPM) でのカオス混合について調べた。この系では、無限に長い半径  $R$  の円筒内に、軸方向の長さが  $L_0$  の平板が互いに直角になるように周期的に配置されている。そして、その中の流体が、軸方向には一定の圧力勾配、断面方向には円筒壁の速度  $V$  での回転によって作られる3次元定常流によって円筒内を動く。

この系の速度場は軸方向 ( $z$  方向とする) に周期  $2L_0$  で周期的であるので、 $\mathbf{X}(z_0)$  を流体粒子が  $z = z_0$  の断面を通過するときの  $(X, Y)$  座標とすると、

$$M: \mathbf{X}(z_0) \mapsto \mathbf{X}(z_0 + 2L_0), \quad (8)$$

によって2次元のポアンカレ写像  $M$  が定義できる。また、この場合のポアンカレ断面は、

$$\mathbf{X}(2nL_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (9)$$

によって定義される点の集合である。

このミキサーの少数周期での混合効率について調べるために、ある断面  $z = z_0$  を出発した流体粒子のうち、 $n$  周期までの間にいずれかの平板の前端にぶつかるものの初期位置からなる集

合を導入する。これを  $n$  周期での「分離曲線」と呼び、 $U^n$  と書くことにする。断面  $z = z_0$  においてこの曲線を含む流体塊は、 $n$  周期の間にいずれかの平板によって分断され、大きく引き伸ばされる。従って、分離曲線はポアンカレ断面の島領域の中には存在できないことがわかる。また、比較的小さい  $n$  に対する  $U^n$  は、一般にカオス領域内に一様に分布するとは限らない。もし  $U^n$  が断面全体に一様に分布していると、 $n$  周期の間に流体全体が大きな引き伸ばしを受け、結果として効率よく混合が起こることが期待される。一方、たとえカオス領域が大きくても、 $U^n$  がその一部に偏在しているときには、 $n$  周期での混合効率は低いと予想される。従って、 $n$  周期での混合効率を評価するためには、 $U^n$  の分布を調べるのが有効である。

## 8 おわりに

流れの混合効率を評価するための、カオスや力学系の理論に基づくいくつかの方法を示した。講演においては、時間があれば、最近研究を始めた曲がった円管内の流れによるカオス混合についても話す予定である。

## 引用文献

- 1) J.M. Ottino : *The Kinematics of Mixing : Stretching, Chaos, and Transport*, (Cambridge Univ. Press, 1989).
- 2) J.M. オットイーノ : 液体はどのように混ざり合うか, サイエンス, 3月号, (1989) 50-63.
- 3) H.Aref : Chaotic Advection of Fluid Particles, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A, **333** (1990) 273-288.
- 4) J.M. Ottino : Mixing, Chaotic Advection, and Turbulence, Annu. Rev. Fluid Mech., **22** (1990) 207-253.
- 5) 船越満明 : カオス混合, 日本流体力学会誌「ながれ」, 第15巻, (1996) 261-264.
- 6) M. Funakoshi : Chaotic Mixing and Mixing Efficiency in a Short Time, Fluid Dyn. Res., **40** (2008) 1-33.
- 7) Y. Mizuno and M. Funakoshi : Chaotic Mixing Caused by an Axially Periodic Steady Flow in a Partitioned-pipe Mixer, Fluid Dyn. Res., **35** (2004) 205-227.