

# カオスを用いた効率の良い流体混合方法の研究

京都大学情報学研究科 複雑系科学専攻 船越 満明

流体運動の**速度場**  $u(x, t)$  が得られていると仮定。  
( $x$  は空間座標,  $t$  は時間)

→ 流体粒子 (流体の微小部分) の位置  $X(t)$  は,

$$\frac{dX(t)}{dt} = u(X(t), t)$$

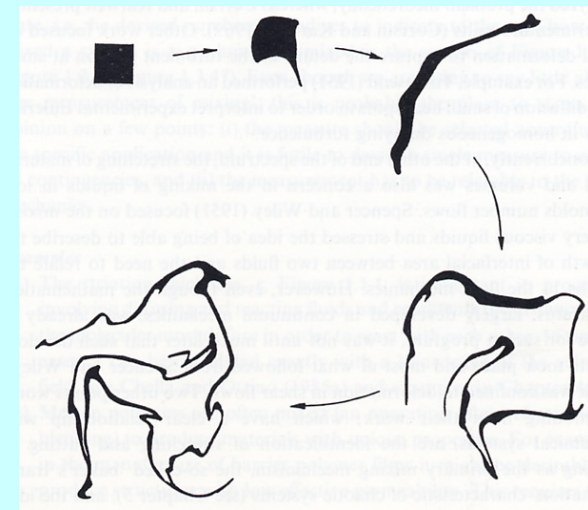
の微分方程式に従って時間発展

- ・ **2次元の非定常流** (速度場が  $t$  に依存する)
- ・ **3次元の定常流** (速度場が  $t$  に依存しない)

では、流体粒子の位置  $X(t)$  は カオス となり得る。

方程式  $\frac{dX(t)}{dt} = u(X(t), t)$  がカオス解をもつと、

カオスの初期値に対する敏感な依存性  
(ごく近い初期値から出発した2つの解の間の距離が、時間とともに指数関数的に増大するという性質)



混合しようとしている流体の境界面の面積が急激に増大

有限の領域内の境界面は、次々と折りたたまれていく必要がある

流体のカオス運動は、効率のよい混合にとって好ましいと期待される

流体粒子の運動がカオスとなるような速度場を作り出す



流体を効率よく混合

カオスを利用した効率の良い混合は、  
カオス混合(chaotic mixing) と呼ばれている

(カオスを有効に利用する研究のひとつ)

カオス混合の研究では、層流の速度場を考える

応用における層流混合の例：

- (1) 非常に粘性係数の大きい流体を、大量に混合する場合
- (2) 原料の微細構造を壊さないように、緩やかに混合する必要がある場合
- (3) マイクロスケールでの流体混合（レイノルズ数が小さい）

# カオス混合研究の具体例(1)

## 偏心2円筒間の流れによる流体混合

中心軸の異なる内外2つの円筒.

両円筒間の環状の領域に, 非圧縮性粘性流体があるとする

両円筒は、ゆっくりと交互に周期的に回転するので、流体の速度は小さい.

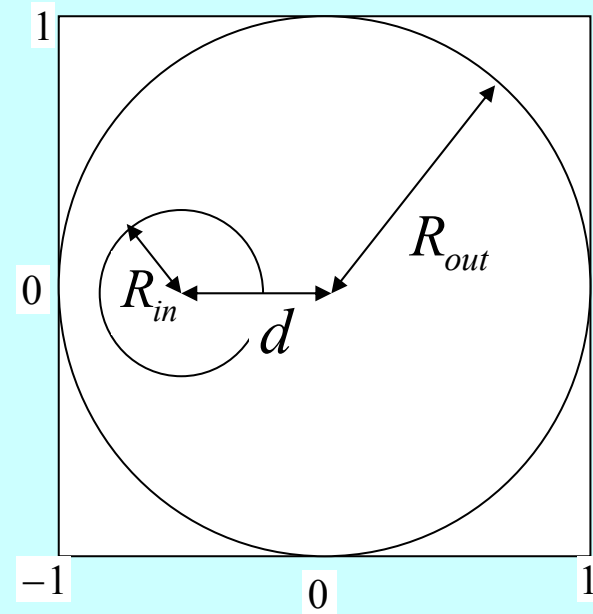
円筒軸方向に速度場は一様と仮定



**2次元時間周期流** (速度場  $u(x,t)$  は**解析的**に求まる)

系のパラメータ 外円筒、内円筒の半径  $R_{out}$ ,  $R_{in}$  中心間距離  $d$

半径比  $\alpha$  と 離心率  $\varepsilon$   $\alpha \equiv \frac{R_{in}}{R_{out}}$ ,  $\varepsilon \equiv \frac{d}{R_{out} - R_{in}}$ ,

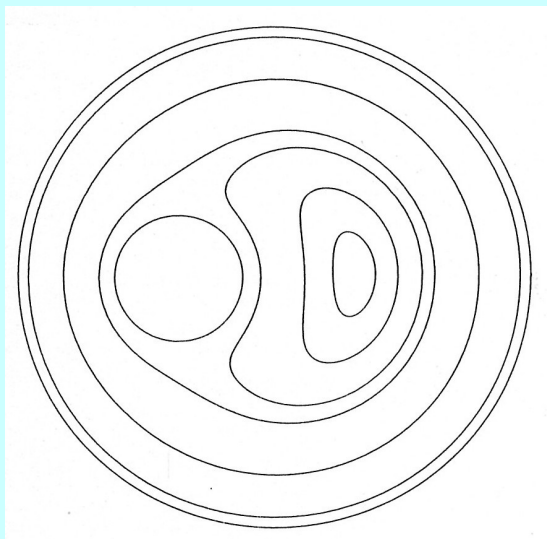


二円筒は交互に周期的な回転を行う

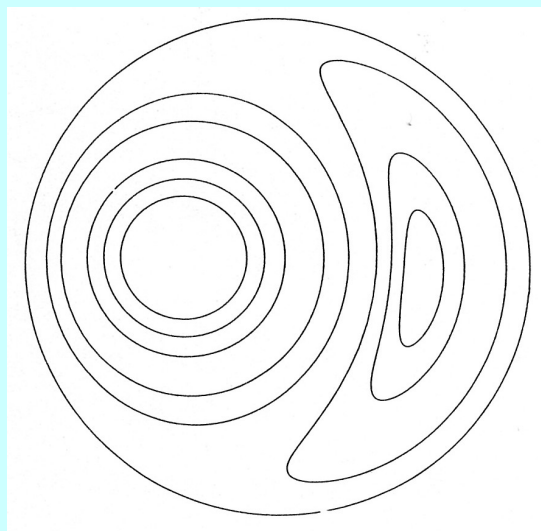
$T_{out}$ ,  $T_{in}$  ... 1周期あたりの外円筒と内円筒の回転数

以下では、 $T_{out} = T_{in} = 1.0$

一方の円筒の回転に伴う速度場の流線



外円筒のみ回転のとき

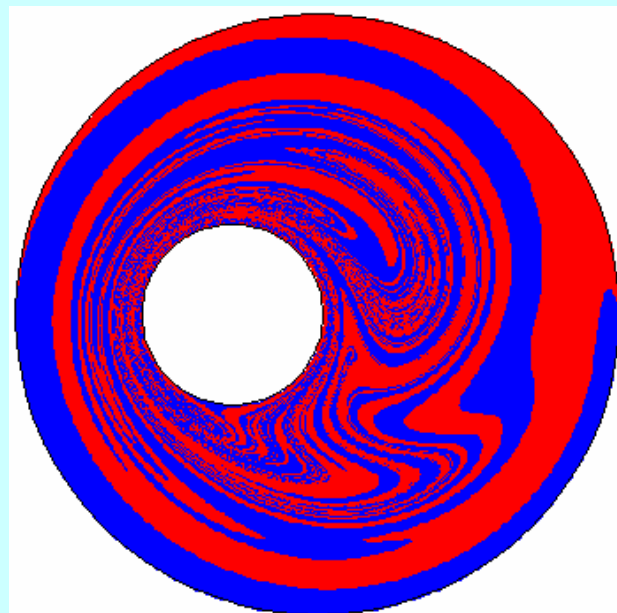
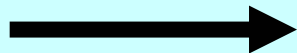
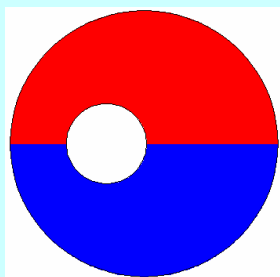


内円筒のみ回転のとき

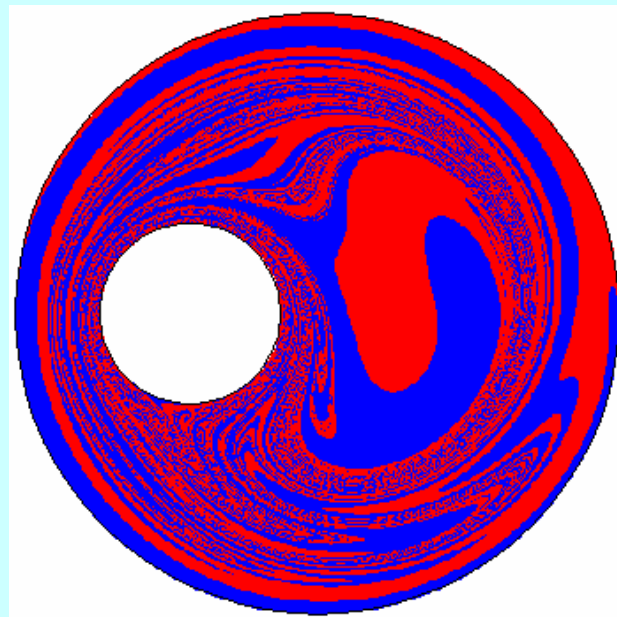
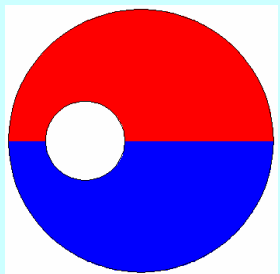
# 混合の例

同方向の1回転ずつを5周期

$\varepsilon = 0.4,$   
 $\alpha = 0.3$



$\varepsilon = 0.6,$   
 $\alpha = 0.3$



# ポアンカレ断面 (ポアンカレプロット)

ポアンカレ写像:

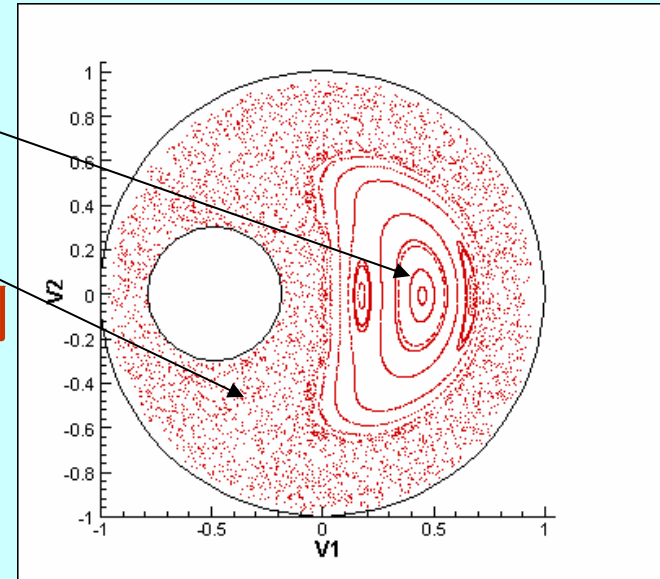
流体粒子のある時刻での位置に、1周期後の位置を対応させる写像

ポアンカレ断面 (ポアンカレプロット):

この写像に基づいて、いくつかの初期点から出発した流体粒子の多周期にわたる位置を重ねて点列として描いた図

規則領域

カオス領域



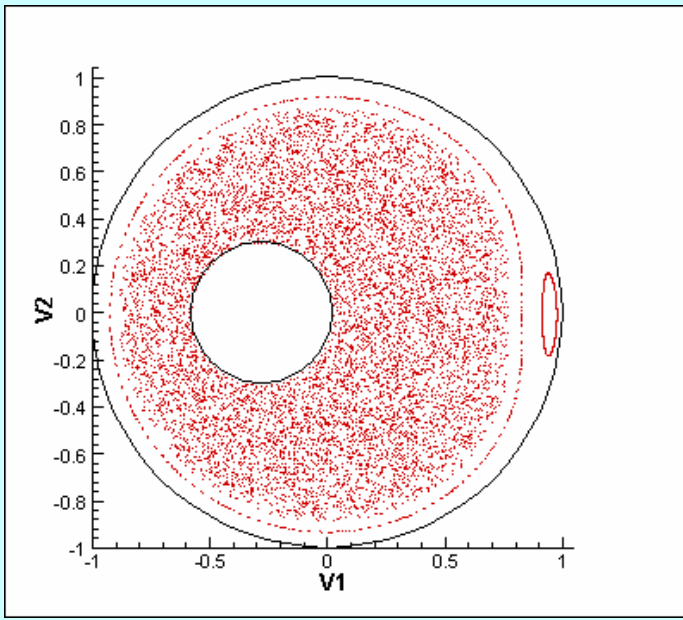
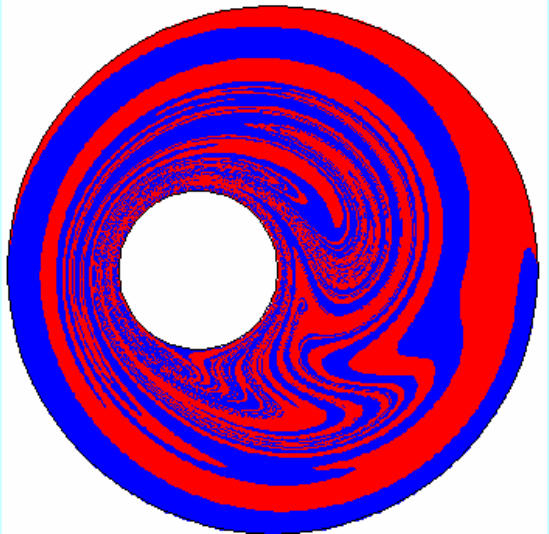
・ポアンカレ断面の領域は、カオス領域と規則領域に分けられる

・規則的な解の点列は、しばしば島領域と呼ばれる多数の閉曲線からなる領域を構成

・流体粒子はカオス領域と島領域の間を移動できないので、島領域の存在は一様な混合にとって障害となる

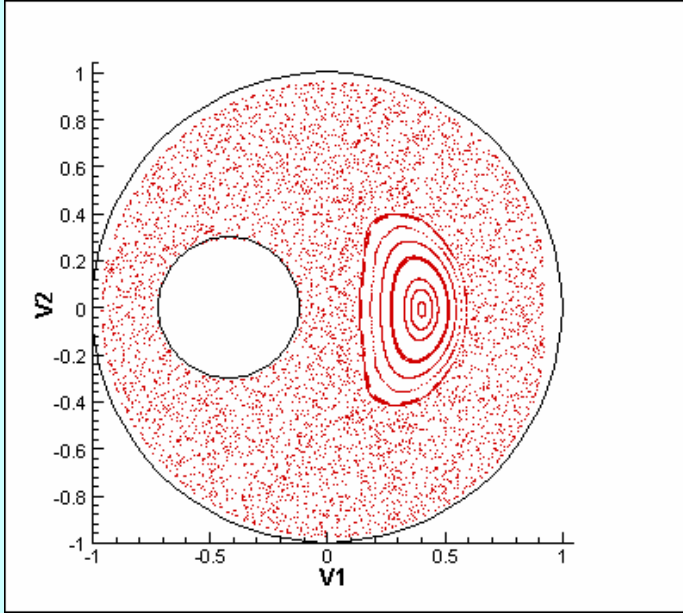
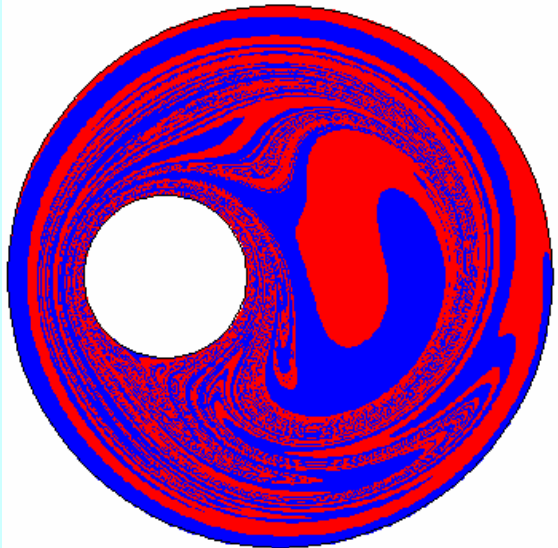
# 混合の図とポアンカレ断面の比較

$\varepsilon = 0.4,$   
 $\alpha = 0.3$



効率の良い混合  
のためには、でき  
るだけカオス領域  
が大きく、規則領  
域の小さいことが  
望ましい

$\varepsilon = 0.6,$   
 $\alpha = 0.3$





# ポアンカレ写像 $f(x)$ の固定点・周期点

$f(x)$ : ある時刻での流体の位置を、1周期後の位置に対応させる写像

- 写像  $f$  の  $n$  周期点 : (1周期点 = 固定点)

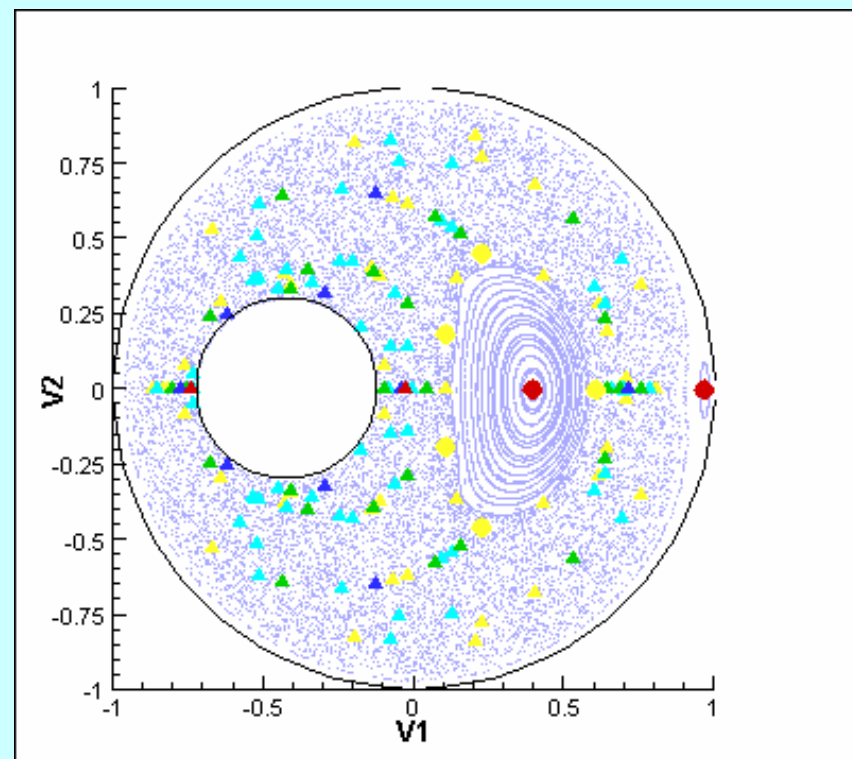
$f^n(x) = x$  の解.

(ただし,  $f^m(x) \neq x, m < n$ )

様々な点を初期点としてNewton法により探索可能.

- |    |     |        |
|----|-----|--------|
| ●  | ... | 安定周期点  |
| ▲  | ... | 不安定周期点 |
| 赤  | ... | 固定点    |
| 青  | ... | 2周期点   |
| 緑  | ... | 3周期点   |
| 水色 | ... | 4周期点   |
| 黄  | ... | 5周期点   |

$\varepsilon = 0.6$

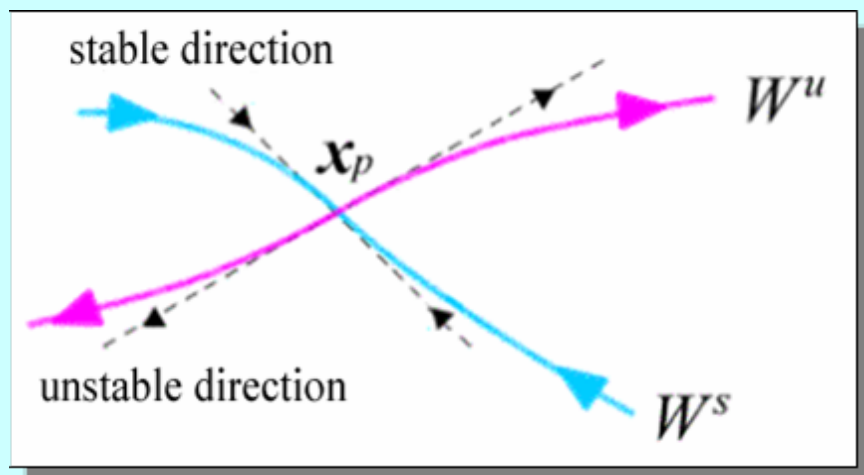


周期点の例(5周期点まで)

# 安定多様体と不安定多様体

$W^s = \{x : \lim_{l \rightarrow \infty} f^{lm}(x) = x_p\}$  :  $x_p$  の安定多様体

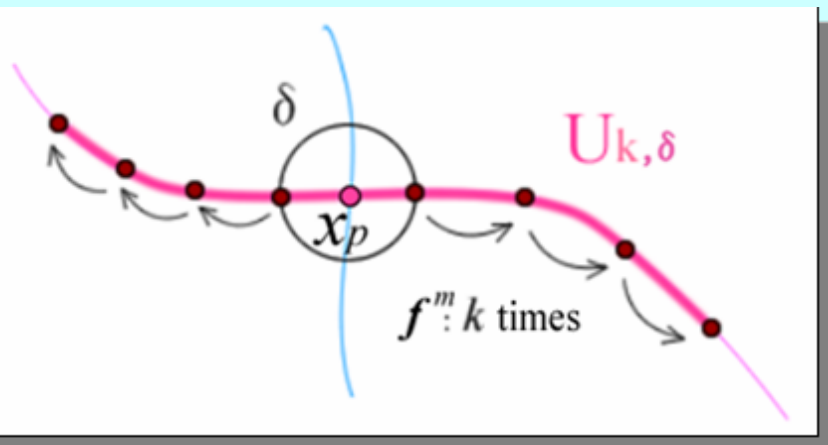
$W^u = \{x : \lim_{l \rightarrow \infty} f^{-lm}(x) = x_p\}$  :  $x_p$  の不安定多様体



( $x_p$  : 不安定  $m$  周期点)

安定方向、不安定方向の微小線分から、 $W^s$  と  $W^u$  を近似的に計算することが可能。

安定多様体、不安定多様体の部分集合 :  $S_{k,\delta}$ ,  $U_{k,\delta}$

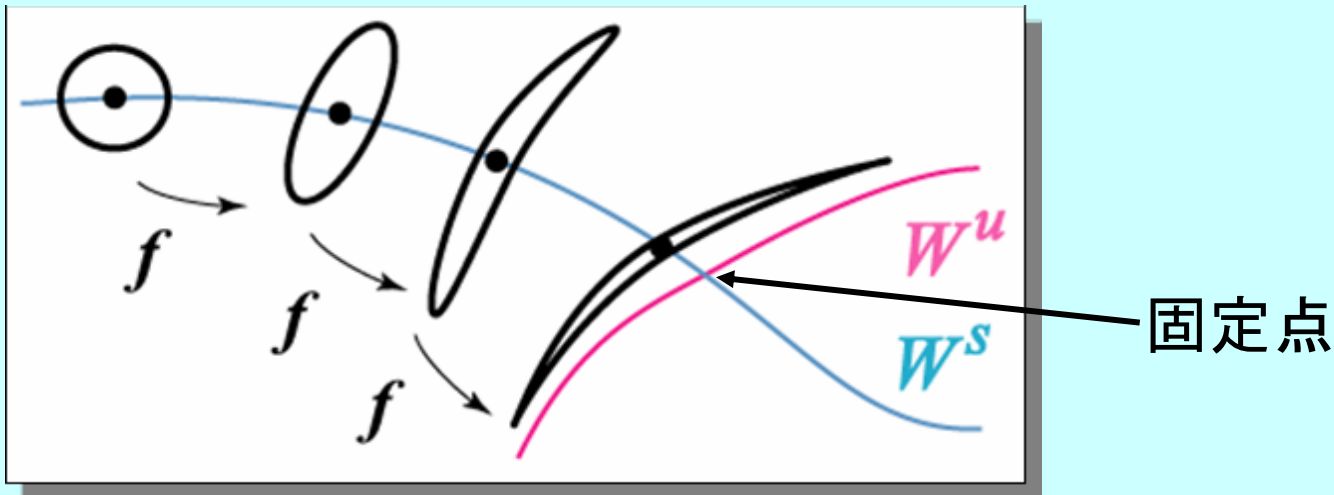


$S_{k,\delta}$  :  $mk$  周期で半径  $\delta$  の円に入ってくる安定多様体の点の集合

$U_{k,\delta}$  :  $-mk$  周期で半径  $\delta$  の円に入ってくる不安定多様体の点の集合

# 混合における安定多様体と不安定多様体の役割

不安定固定点の安定多様体  $W^s$  上の流体の微小部分は、不安定多様体  $W^u$  の方向に引き伸ばされると期待される

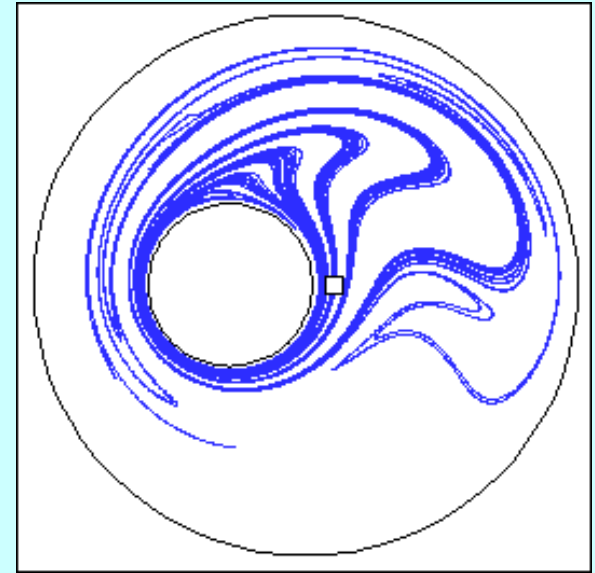
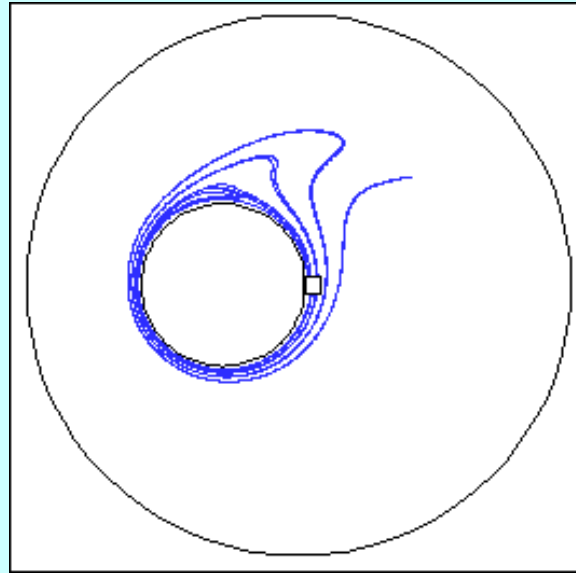
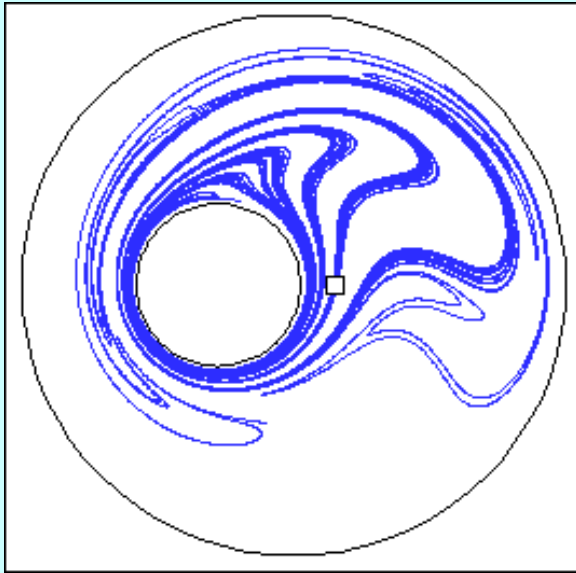


安定多様体の分布と混合効率の関係に注目する

比較的大きな引き伸ばし率の値を持つ不安定固定点・周期点の近傍が、混合に大きく寄与すると予想する

このような固定点・周期点の安定多様体は、混合がすみやかに進む領域であると予想し、その形に注目する

# 不安定固定点の安定多様体の例



$$\alpha=0.3, \varepsilon=0.4, T_{out}=1.0, T_{in}=6.0, k=4, \delta=0.001R_{out}$$

小さい四角が固定点の場所

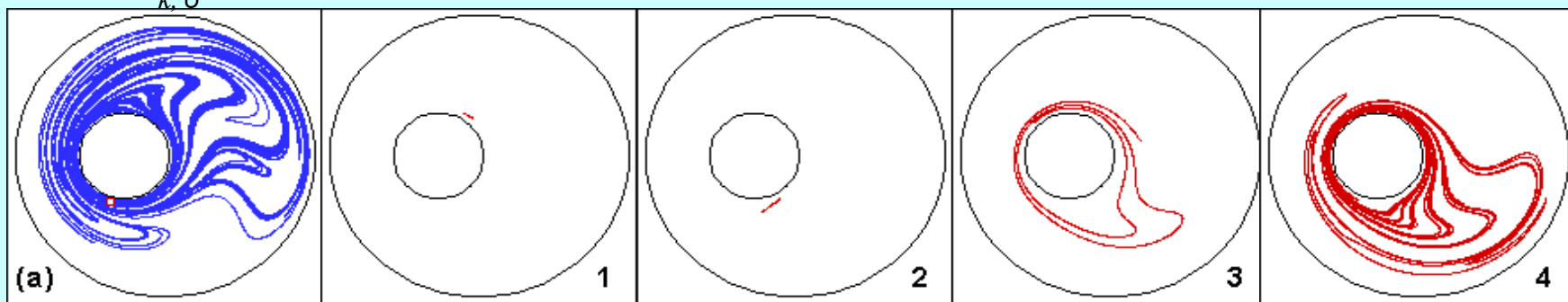
異なる固定点に対する安定多様体は互いに似ている

# 安定多様体の密度が異なる場所から出発した 流体要素の時間発展の比較

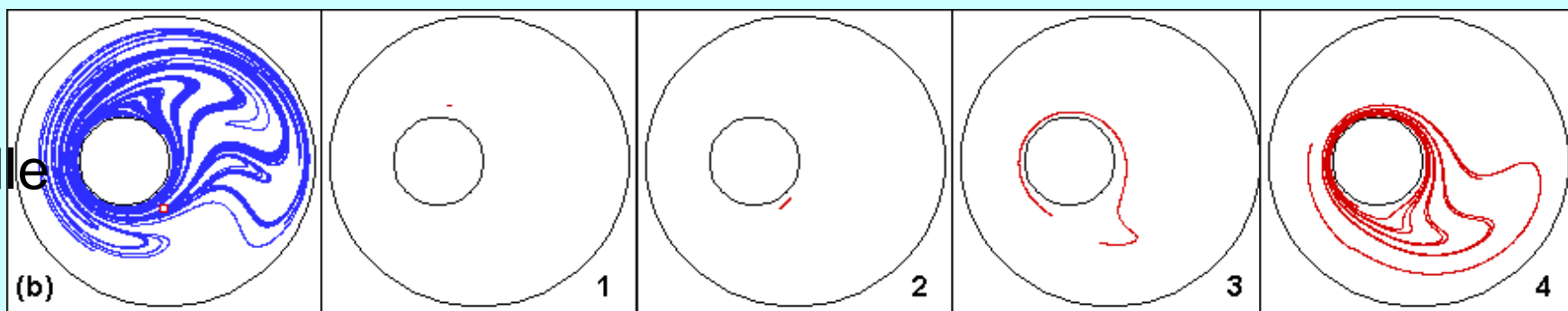
$T_{out} = 1.0,$   
 $T_{in} = 6.0,$   
 $\alpha = 0.3,$   
 $\varepsilon = 0.4$

density  $S_{k,\delta}$  ( $k=4, \delta = 5.0e-4 R_{out}$ )

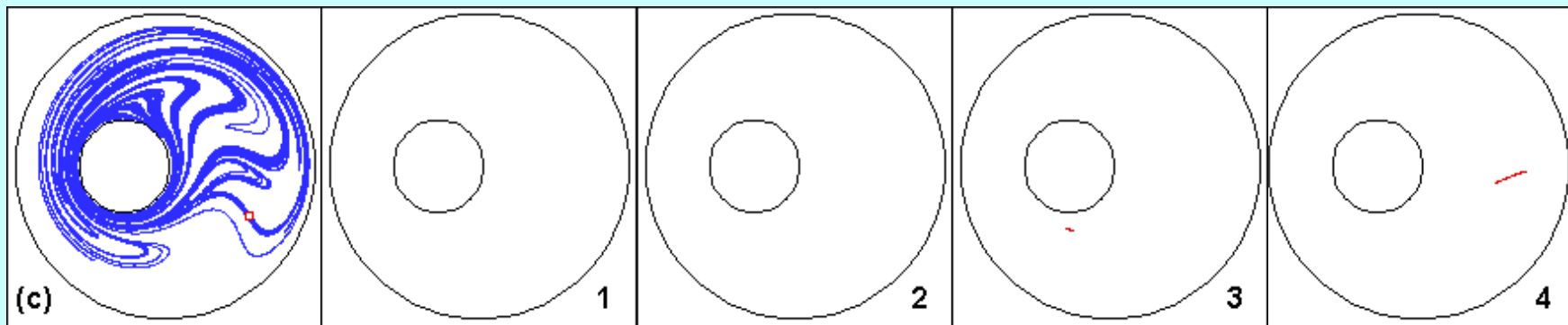
high



middle



low



ポアンカレ写像の不安定固定点の**安定多様体**に関して、次のことが言える

安定多様体の密度が大きい領域から出発した流体の微小部分は、短時間の間に大きく引き伸ばされ、またよく混合される。



この密度分布は、**短時間での混合効率の指標**となり得る。

安定多様体が一様に近い分布をしている場合には、短時間での効率のよい混合が期待できる。