高速モンテカルロ法のリスク解析への応用
Application of a fast Monte Carlo method to risk analysis

京都大学 ICTイノベーション2009

情報学研究科 複雑系科学専攻
非線形力学分野　田中泰明
hiroaki@acs.i.kyoto-u.ac.jp

1.研究の背景

現代社会においては，さまざまな分野で**リスク解析**が必要不可欠

リスク
＝損失または損失の起こる可能性

↓

リスクを定量化した上で，総リスクができるだけ小さくなるような方策を講じることが重要

リスク解析においては，**リスクの定量化**が必要

↓

リスクの定量化法は分野によって様々であるが，リスクの原因となる，**損失をもたらす事象の生起確率の推定**が必要となる

- 通常「リスク」とは，損失の発生が不確実である場合を想定するので，**確率による定量化**が基本となる。
- 近年のリスク解析においては，損失をもたらす事象の**生起確率が非常に小さい**場合を対象とすることが多い。

2. 数学的定式化の枠組み

システムの入出力の基本関係

不確実性を記述する雑音(**確率過程**)

→ **確率微分方程式**によるシステムの記述 → システムの出力も確率過程

損失をもたらす事象の不確実性の数学的表現

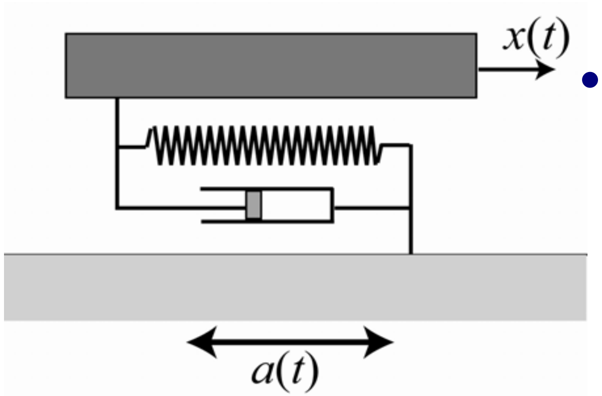
確率微分方程式で記述されるシステムの状態が，ある領域に到達すると「損失」が発生

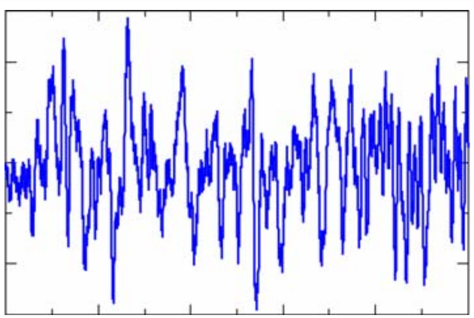
→ リスクの定量化を行なうには，**確率過程の初到達問題**を解くことが重要

- 確率過程の初到達問題に対する，一般的な解析的解法は見出されておらず，解析的な結果を得るのは困難である場合が圧倒的に多い。
- したがって，**計算機シミュレーションの適用が実用的には重要**となる。

地震リスク解析の場合

低層構造物の応答モデルの例





入力地震動のサンプル挙動

構造物の応答方程式

入力地震動のランダム変動(確率過程)

構造物のランダムな応答を記述する確率微分方程式

構造物の応答がある限界値を超えると構造物が破壊

損失(リスク)の発生

地震リスク解析におけるリスクの定量化

信頼度による定量化

- 地震動入力に対して構造物が破壊しない確率を**信頼度**と呼び，信頼度が要求されるレベルを上回るように耐震設計を行なう（**信頼性設計**）。
- 原子力発電所などの重要構造物では，確率論，信頼度に基づいた安全設計が実際に行なわれている（**確率論的安全性評価**）。

期待損失額による定量化

- 信頼度そのものではなく，構造物の破壊発生時の**損失額の期待値でリスクを定量化**する。

リスク＝破壊発生時の損失額×破壊する確率
　　　＝破壊発生時の損失額×（1－信頼度）

- 近年，特に日本では阪神淡路大震災以降，地震リスクをこのような考え方で評価することが一般にも広く浸透してきている。

信用リスク解析の場合

企業資産の時間変動モデル

資産成長率のランダム変動

- Wiener過程
- 複合Poisson過程
- 二重確率Poisson過程
- バリアンスガンマ過程

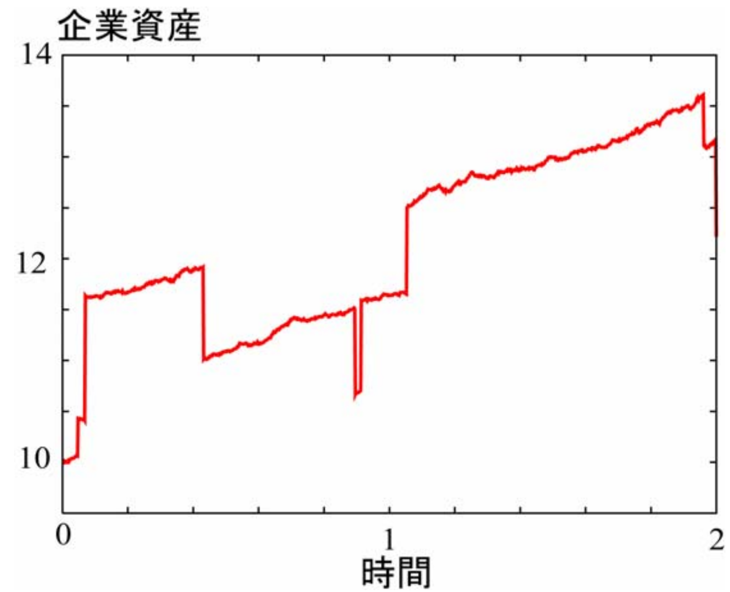
企業資産のランダムな時間変動を記述する確率微分方程式

↓

資産がある限界レベルを下まわるとデフォルト(債務不履行)が発生

↓

信用リスク



バリアンスガンマ過程に基づくモデルでの企業資産の時間変動のサンプル挙動

信用リスク解析におけるリスクの定量化

- この分野では，**デフォルト確率**そのものを定量化されたリスクと捉えることが多いが，近年は，**バリューアットリスク**と呼ばれるリスク指標や，期待損害額の考え方が反映された**期待ショートフォール**と呼ばれるリスク指標も広く用いられるようになってきている。
- 信用リスクは，融資を行なう際の安全性の評価の他に，CDS (Credit Default Swap)やCDO (Collateralized Debt Obligation) などの**信用リスク証券化**商品の価格付けにおいて重要となる。
- 保険会社の場合は，デフォルト確率の評価が**再保険契約**の評価において重要な役割を演ずる。

3. モンテカルロ法とその高速化

モンテカルロ法とその問題点

- 構築した確率モデルに基づき，計算機上で発生させた擬似乱数を利用してシステムの挙動のサンプルを多数発生させ，それらを統計的に処理してリスク指標を推定する手法。
- 各サンプルは互いに独立に発生させるのが基本で，シミュレーションの枠組みは非常に簡明である。
- 発生サンプル数を十分に大きく取れば，推定値は真値に収束していくが，モンテカルロ法ではその収束のスピードが非常に遅い。モンテカルロ法での推定での誤差は，発生サンプル数の平方根に逆比例するが，これは収束のスピードとしては非常に遅い。
- 近年のリスク解析では，非常に小さな生起確率が要求されることが多いが，その場合にはこの収束の遅さが致命的であり，莫大な数のサンプルの発生が必要となる。このため，事実上推定が不可能となってしまう。

分散減少法と重点サンプリング法および確率測度変換法

- モンテカルロ法での誤差は次式で与えられる。

$$\text{シミュレーション誤差} = \frac{C}{\sqrt{\text{発生サンプル数}}}$$

- モンテカルロ法の基本枠組みではこの収束性は変更できないので，比例係数Cを小さくすることで，少ないサンプル数での推定が可能となる。この手法を，**分散減少法**と呼ぶ。
- 特に，対象とする事象の生起頻度を変えて，稀にしか起こらない事象が多数生起するように仕組みを変動することにより分散減少を実現する方法を，**重点サンプリング法（加重サンプリング法）**と呼ぶ。
- 重点サンプリングを実現するために，確率測度（事象の発生の確からしさを支配するもの）を理論的に変換して別の確率測度を構成する手法を，特に**確率測度変換法**と呼ぶ。

信用リスク評価での例

X_t: 時刻tでの企業の資産(確率過程)

構築した確率モデルにおける
確率微分方程式の解

資産過程の全挙動 $\boldsymbol{X} = \{X_t; 0 \le t \le T\}$

$\psi(T, x_0)$ 初期資産x_0の下で，時点Tまでにデフォルトが発生する確率

$\hat{\psi}(T, x_0; N)$ デフォルト確率に対する，サンプル数N個でのモンテカルロ法による推定値

$$\hat{\psi}(T, x_0; N) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f\left[\boldsymbol{X}^{(n)} \right]$$

$$f[\boldsymbol{X}] = \begin{cases} 1 & (0 \le t \le T \text{ でデフォルトが発生}) \\ 0 & \text{(デフォルトが発生しない)} \end{cases}$$

$\boldsymbol{X}^{(n)}$: 資産過程の全挙動の独立なサンプル列

原確率測度Pに対して，変換された確率測度Qの下で行なう
確率測度変換法での推定値

$$\hat{\psi}(T, x_0; N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f\left[\boldsymbol{X}_Q^{(n)}\right]\left(\frac{dP}{dQ}\right)_Q^{(n)}$$

- dP/dQは**Radon-Nikodym導関数**と呼ばれるもので，2つの確率測度間の変換係数を表す。この場合はサンプルの発生のさせ方を変更することに対する。発生頻度の変換の重み係数を与える。
- 添え字のQは，変換されたQの下でサンプルを発生させることを表す。

確率測度変換法での重要なポイント

- Radon-Nikodym導関数を容易に評価できるような確率測度変換を構築しなければならない。
- 推定値の真値への収束が速くなるようなQ，特にその中でも最も効率のよいものを見出す手法を確立しておかなければならない。

地震リスクモデルなどのような連続状態変動モデルでは，Wiener過程を雑音源にすることが多い

→ Girsanov変換を基軸とした確率測度変換

保険リスクモデルなどでは，複合Poisson過程やそれを変形した確率過程を雑音源にすることが多い

→ Delbaen-Haezendonck変換を基軸とした確率測度変換

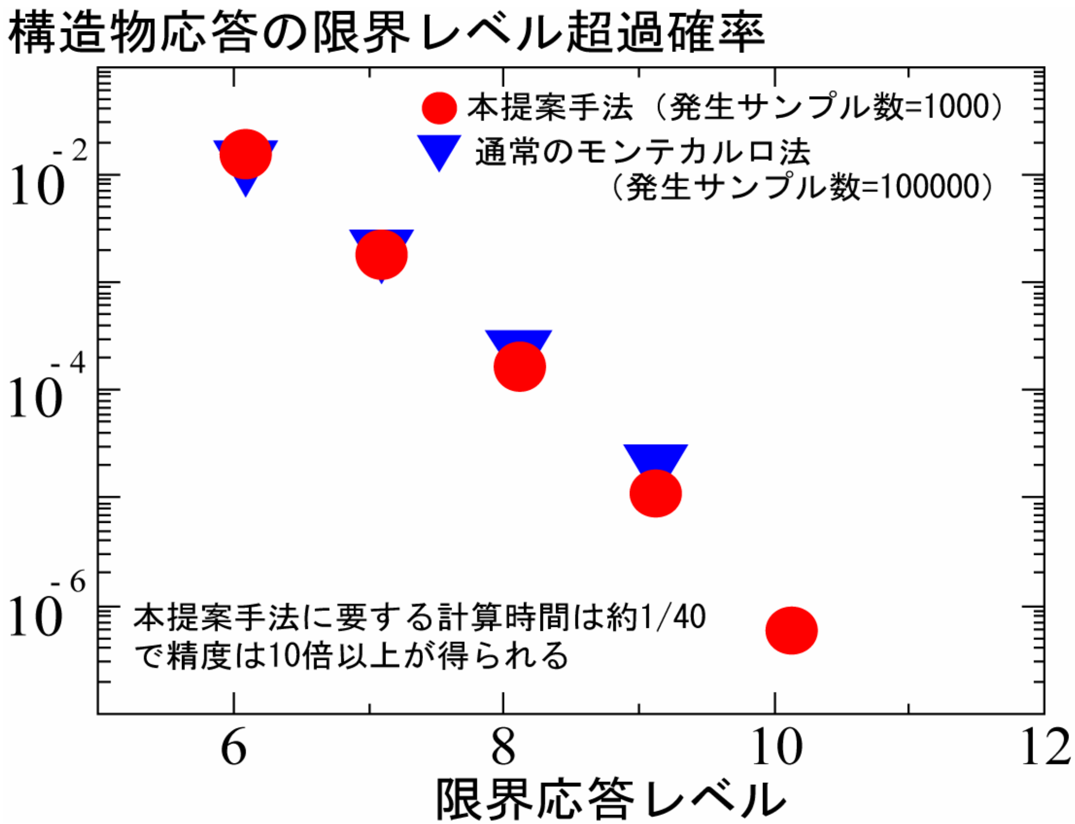
近年のリスクモデルでは，より多様な確率過程を使用する傾向にあり，特にLevy過程を用いることが多い

→ Levy-Itoの分解定理を利用して，Girsanov変換・Delbaen-Haezendonck変換を混合させた確率測度変換が有効であると期待できる（著者による最近の研究）

4.数値例

地震リスク解析での適用例

低層構造物を想定した1自由度の応答系に，El Centro地震スペクトルと同じスペクトルを有する定常雑音を入力した系



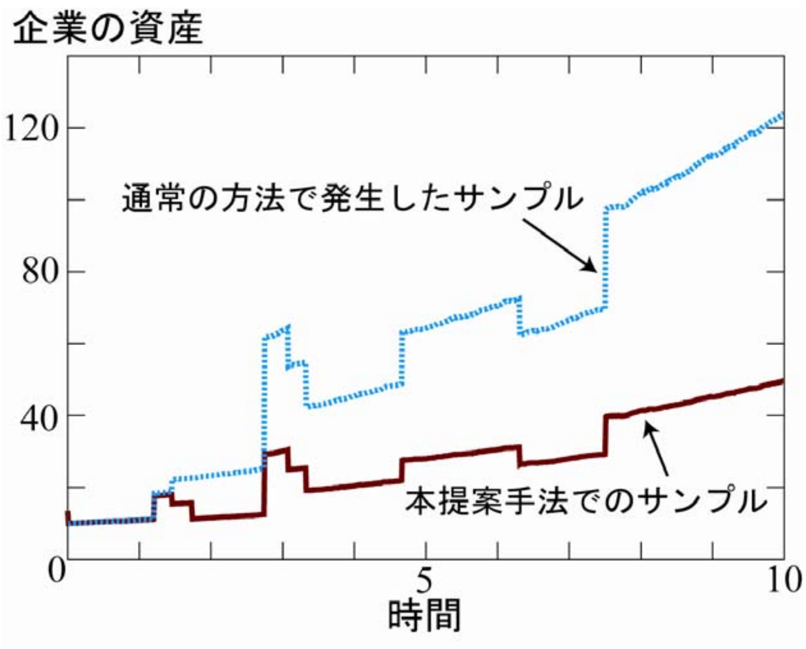
- 限界応答レベルが10では，超過確率が非常に小さいため，10^5サンプルを発生させた通常モンテカルロ法では推定値が出ない
- 本提案手法では必要な計算時間が約1/40に短縮できるにも関わらず，精度は逆に10倍以上に向上する。この精度の向上率は，破壊確率が小さくなるほど飛躍的に増大する。

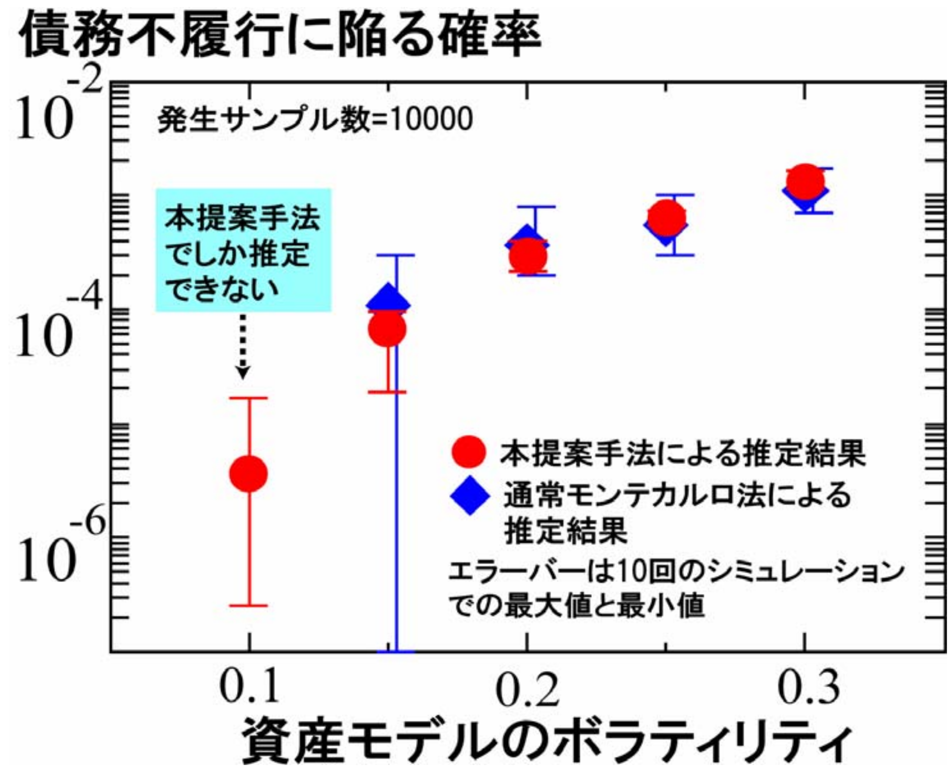
信用リスク解析での適用例

$$dX_t = \mu_0 X_t dt + \sigma_0 X_{t-} dW_t \qquad X_0 = x_0$$

$$Z_t = \frac{1}{\sigma_0} \ln F_t \qquad dF_t = \sigma_0 F_{t-} dW_t$$

X_t: 対象とする企業の時刻tでの資産
Z_t: 時間一様なバリアンスガンマ過程





通常では稀にしか発生しないデフォルトを多数生起させるため，資産の時間成長が抑制されるように確率測度Qが選定されており，それがシミュレーションにおいてうまく機能していることがよくわかる。

- ボラティリティとは，資産の変動の揺れの大きさを支配するパラメーター
- エラーバーは独立な10回のシミュレーションでの最大と最小を示しており，推定結果はその平均値で与えられている。したがって，エラーバーの幅が狭いほど推定の精度が向上していることになる。

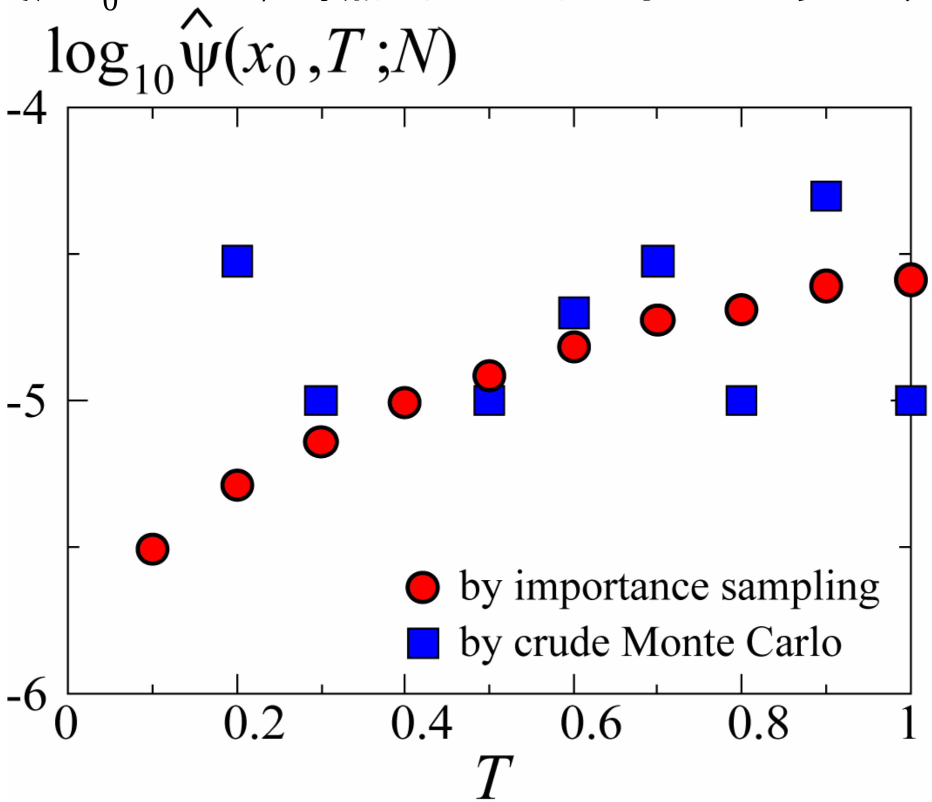
保険リスク解析での適用例

Tanaka, H., Yoshio Ichida and Michiko Toyoda-Makino, “Application of an Importance Sampling Method to Risk Models in Insurance Theory”, Proc. of ICASP 9, Vol.**1**, pp.749-756, Millpress (2003). より引用

保険請求の発生：Poisson過程

保険請求額の分布：パレート分布

$\psi(T, x_0)$ 初期資産x_0の下で，時点Tまでにデフォルトが発生する確率

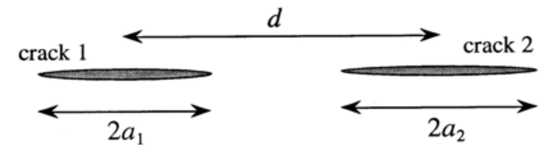


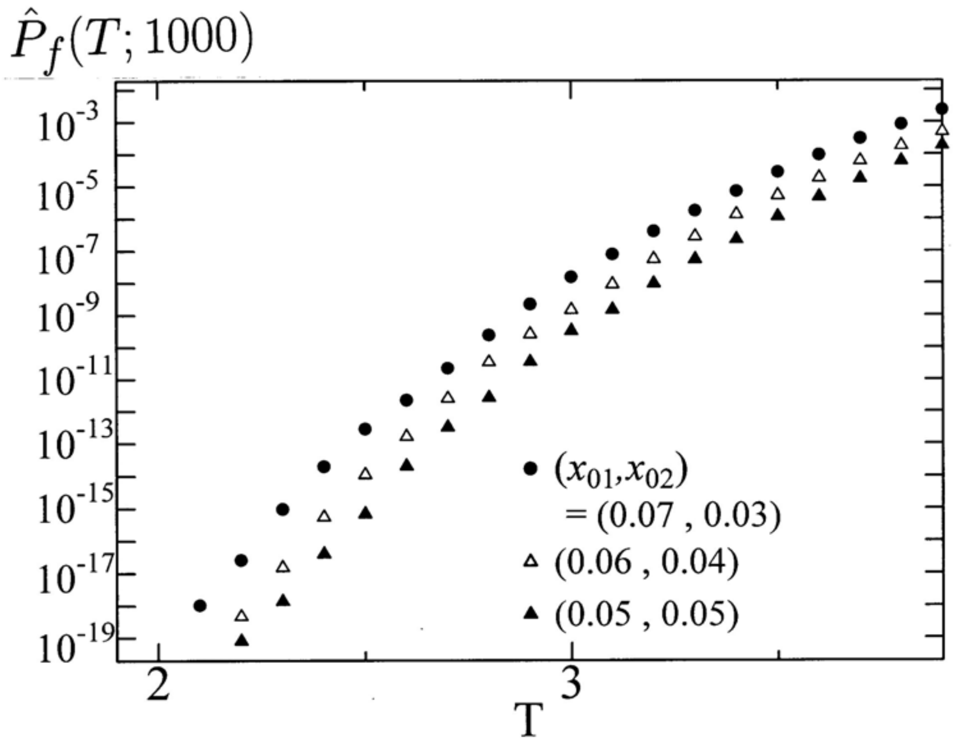
- 縦軸はデフォルト確率の推定値の対数プロット，横軸は時間
- 赤丸は提案手法での結果，青四角は通常法での結果
- パレート分布はヘビーテイルと呼ばれる性質を有しており，ヘビーテイルの場合のデフォルト確率の推定は難しいことは広く知られてきているが，本提案手法ではそのような場合でも高い推定精度が得られることを示している。

疲労破壊に対するリスク解析での適用例

Tanaka, H., " Importance Sampling Simulation for a Stochastic Fatigue Crack Growth Model," *Proc. of ICASP8*1999*, **2**, pp.907-914 (1999), Balkema.より引用

航空機胴体部に発生するマルチサイトクラック
を想定した，一直線上の2つの互いに相互作用
する疲労き裂の成長モデルを構成





- 縦軸は，時刻Tまでに破壊が発生する確率の推定値の対数プロット
- x_{01},x_{02}はそれぞれのき裂の初期の大きさで，それらに偏りがあるほど応力集中が多大となり，破壊確率が上がることを示している。
- シミュレーションでの発生サンプル数は1000で，これだけのサンプル数でも10^{-20}程度まで推定することが可能となる。

参考文献

1. Tanaka, H., “Application of an importance sampling method to time-dependent system reliability analyses using the Girsanov transformation,” *Proc. of ICOSSAR'97*, **1**, pp.411-418 (1998), Balkema.
2. Tanaka, H., “ Importance Sampling Simulation for a Stochastic Fatigue Crack Growth Model,” *Proc. of ICASP8*1999*, **2**, pp.907-914 (1999), Balkema.
3. Tanaka, H., “Importance Sampling Simulation for Compound Poisson Processes,” *Proc. of MCS2000*, pp.52-62 (2001), Balkema.
4. Tanaka, H., “Importance Sampling Method for Time-dependent ReliabilityAnalyses with Poisson White Noises,” *Proc. of ICOSSAR’01*, CD-ROM Paper No.131, Balkema(2002).
5. 田中泰明, “Poisson型白色雑音を伴う動的システムに対する効率化シミュレーションスキーム, ” *Proc. of JCOSSAR2000*, **4**, pp.383-390 (2000).
6. 田中泰明, 牧野倫子, 市田良夫：”Cramer-Lundberg型リスクモデルに対する高速モンテカルロ法の適用”, JCOSSAR 2003論文集, Vol.**5**, pp. 243-248, 日本材料学会 (2003)
7. Tanaka, H., Yoshio Ichida and Michiko Toyoda-Makino, “Application of an Importance Sampling Method to Risk Models in Insurance Theory”, Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (Proc. of ICASP 9), Vol.**1**, pp.749-756, Millpress (2003).
8. Tanaka, H. and Noriatsu Tanji, “ Importance sampling method based upon the Meyer theorem for stochastic systems driven by a generalized noise”, *Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (Proc. of ICASP 10)*, CD-ROM paper No.030, Taylor & Francis/Balkema (2007).
9. 田中泰明,” 重点サンプリング法による微小デフォルト確率の推定” , 第57回理論応用力学講演会講演論文集, pp. 545-546 (2008).

上記論文の別刷り等がご入用の場合は，下記までご連絡下さい。

hiroaki@acs.i.kyoto-u.ac.jp